Exercices sur les suites arithmético-géométriques – Term ES

Exercice 1

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2013 et a enregistré 2500 inscriptions en 2013.
Elle estime que, chaque année, 80% des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.
On modélise cette situation par une suite numérique (a_n).
On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2013 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $(2013+n)$.

1) a) Calculer a_1 et a_2.
   b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a la relation $a_{n+1} = 0,8 \times a_n + 400$.
2) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = a_n - 2000$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0,8$.
   b) En déduire que le terme général de la suite (a_n) est $a_n = 500 \times 0,8^n + 2000$.
   c) Calculer la limite de la suite (a_n).
   d) Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhérents à la médiathèque si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir ?
3) On propose l'algorithme suivant :

```
Variables :        A est un nombre réel
                   N est un entier naturel
Initialisation :   Affecter à N la valeur 0
                   Affecter à A la valeur 2 500
Traitement :       Tant que A – 2000 > 50
                       A prend la valeur A*0,8 + 400
                       N prend la valeur N+1
                   Fin Tant que
Sortie :           Afficher N
```

   a) Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme et interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.
   c) Écrire l'algorithme proposé avec Algobox et vérifier le résultat obtenu dans la question précédente.

Exercice 2

On comptait 700 élèves dans un lycée lors de la rentrée de 2012.
À la fin de chaque année scolaire, après le départ des nouveaux bacheliers et des élèves quittant l'établissement, le lycée conserve 70% de son effectif pour l'année suivante.
Il reçoit 240 nouveaux élèves à chaque rentrée.

1) Calculer le nombre d'élèves dans le lycée aux rentrées 2013 et 2014.
2) On définit la suite (a_n) par : $a_0 = 700$ et, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,7 \times a_n + 240$.
   Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_n - 800$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,7. Préciser son premier terme.
   b) Exprimer u_n en fonction de n.
   c) En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
3) On choisit de modéliser le nombre d'élèves du lycée par les termes de la suite (a_n).
   Il faudra agrandir le lycée dès que l'effectif sera supérieur ou égal à 780 élèves.
   a) Montrer que résoudre l'inéquation $800 - 100 \times 0,7^n \geq 780$ revient à résoudre l'inéquation :

$0,7^n \leq 0,2$.

b) En quelle année faudra-t-il agrandir le lycée ?

Exercice 3

Le paradoxe d'Achille et de la tortue fut imaginé par Zénon d'Élée (5 siècles avant J.-C.).

Achille qui court très vite, dispute une course avec une tortue à laquelle il a laissé une certaine distance d'avance.

Au départ Achille se trouve à la position A_0 et la tortue à la position A_1.

Achille court et arrive en A_1. Pendant qu'il courait, la tortue a avancé et elle se trouve alors à la position A_2.

Achille court et arrive en A_2. Pendant qu'il courait, la tortue a avancé et elle se trouve alors à la position A_3.

Etc ...

La course peut se poursuivre selon une infinité d'étapes et Achille ne rattrape jamais la tortue.

Pourtant si Achille court plus vite que la tortue, on sait bien qu'il va la rattraper !

C'est ce type de proposition qui semble contraire à la logique, au "bon sens", que l'on appelle paradoxe.

Supposons qu'Achille parcourt 4 mètres en une seconde (soit environ 15 km/h), que la tortue avance de 0,5 m en une seconde et qu'elle ait, au départ, une avance de 560 mètres.

1) Quelle est la distance $d_0 = A_0A_1$ et quel est le temps t_0 qu'il faut à Achille pour parcourir cette distance ?
2) Pendant qu'Achille parcourait la distance d_0, de quelle longueur a avancé la tortue ?
3) Quel est le temps t_1 qu'il faut à Achille pour parcourir la distance $d_1 = A_1A_2$?
4) On note d_n la distance A_nA_{n+1} et t_n le temps qu'il faut à Achille pour parcourir la distance d_n. Justifier que pour tout entier n, $d_n = 8 \times d_{n+1}$ et que $t_n = 8 \times t_{n+1}$.
5) En déduire que les suites (d_n) et (t_n) sont géométriques et donner leur raison.
6) Donner l'expression de d_n en fonction de n et de t_n en fonction de n.
7) Calculer $D_n = d_0 + d_1 + d_2 + ... + d_n$ et $T_n = t_0 + t_1 + t_2 + ... + t_n$.
8) Donner $\lim\limits_{n \to +\infty} D_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$.
9) Comment peut-on expliquer le paradoxe ?

Exercice 4 :

En 2005, année de sa création, un club de randonnée pédestre comportait 80 adhérents. Chacune des années suivantes on a constaté que :

- 10% des participants ne renouvelaient pas leur adhésion au club ;
- 20 nouvelles personnes s'inscrivaient au club.

On suppose que cette évolution reste la même au fil des ans.

Partie A

On donne l'algorithme ci-contre :

Entrée :	Saisir un entier n positif
Initialisation :	X prend la valeur 80
Traitement :	Pour i allant de 1 à n
	Affecter à X la valeur 0,9*X+20
	Fin Pour
	X prend la valeur de X arrondie à l'entier inférieur
Sortie :	Afficher X

1) Pour la valeur $n = 2$ saisie, quelle est la valeur affichée à la sortie de cet algorithme ?
2) Interpréter dans le contexte du club de randonnée, pour la valeur $n = 2$ saisie, le nombre affiché à la sortie de cet algorithme.

Partie B

1) On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 80$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,9 \times a_n + 20$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n = a_n - 200$.

a) Démontrer que (b_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

b) Exprimer b_n en fonction de n.

2) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n = 200 - 120 \times 0,9^n$.

3) Quelle est la limite de la suite (a_n) ?

Partie C

1) L'objectif du président du club est d'atteindre au moins 180 adhérents. Cet objectif est-il réalisable ?
2) Même question si l'objectif du président du club est d'atteindre au moins 300 adhérents.

<u>Exercice 5 :</u>

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010+n)$. En 2010, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

1) Montrer que la situation peut être modélisée par $u_0 = 50$ et pour tout entier naturel n par la relation :

$$u_{n+1} = 0,95 \times u_n + 3$$

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = 60 - u_n$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

b) Calculer v_0. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n = 60 - 10 \times 0,95^n$.

3) Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2015. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.
4) a) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $u_{n+1} - u_n = 0,5 \times 0,95^n$.

c) En déduire la monotonie de la suite.

5) Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres de la forêt en 2010.
6) Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter.

CORRIGE

Exercice 1

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2013 et a enregistré 2500 inscriptions en 2013.

Elle estime que, chaque année, 80% des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.

On modélise cette situation par une suite numérique (a_n).

On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2013 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $(2013+n)$.

1) a) $a_1 = a_0 \times 80\% + 400 = 2500 \times 0,8 + 400 = 2400$

$a_2 = a_1 \times 80\% + 400 = 2400 \times 0,8 + 400 = 2320$

b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a la relation $a_{n+1} = 0,8 \times a_n + 400$.

Par définition : $a_{n+1} = a_n \times 80\% + 400 = 0,8 \times a_n + 400$

2) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = a_n - 2000$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0,8$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a_{n+1} - 2000}{a_n - 2000} = \frac{0,8 \times a_n + 400 - 2000}{a_n - 2000} = \frac{0,8 \times a_n - 1600}{a_n - 2000} = \frac{0,8 \times (a_n - 2000)}{a_n - 2000} = 0,8$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = a_0 - 2000 = 2500 - 2000 = 500$ et de raison $q = 0,8$.

(v_n) s'écrit : $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0,8^n$

b) En déduire que le terme général de la suite (a_n) est $a_n = 500 \times 0,8^n + 2000$.

$v_n = a_n - 2000$ donc $a_n = v_n + 2000 = 500 \times 0,8^n + 2000$

c) Calculer la limite de la suite (a_n).

$0,8 \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 2000$

d) Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhérents à la médiathèque si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir ?

A long terme, le nombre d'adhérents va se stabiliser autour de 2000.

3) On propose l'algorithme suivant :

```
Variables :        A est un nombre réel
                   N est un entier naturel
Initialisation :   Affecter à N la valeur 0
                   Affecter à A la valeur 2500
Traitement :       Tant que A – 2000 > 50
                        A prend la valeur A*0,8 + 400
                        N prend la valeur N+1
                   Fin Tant que
Sortie :           Afficher N
```

a) Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

→ Il calcule au bout de combien d'années le nombre d'adhérents passe en dessous de 2050.

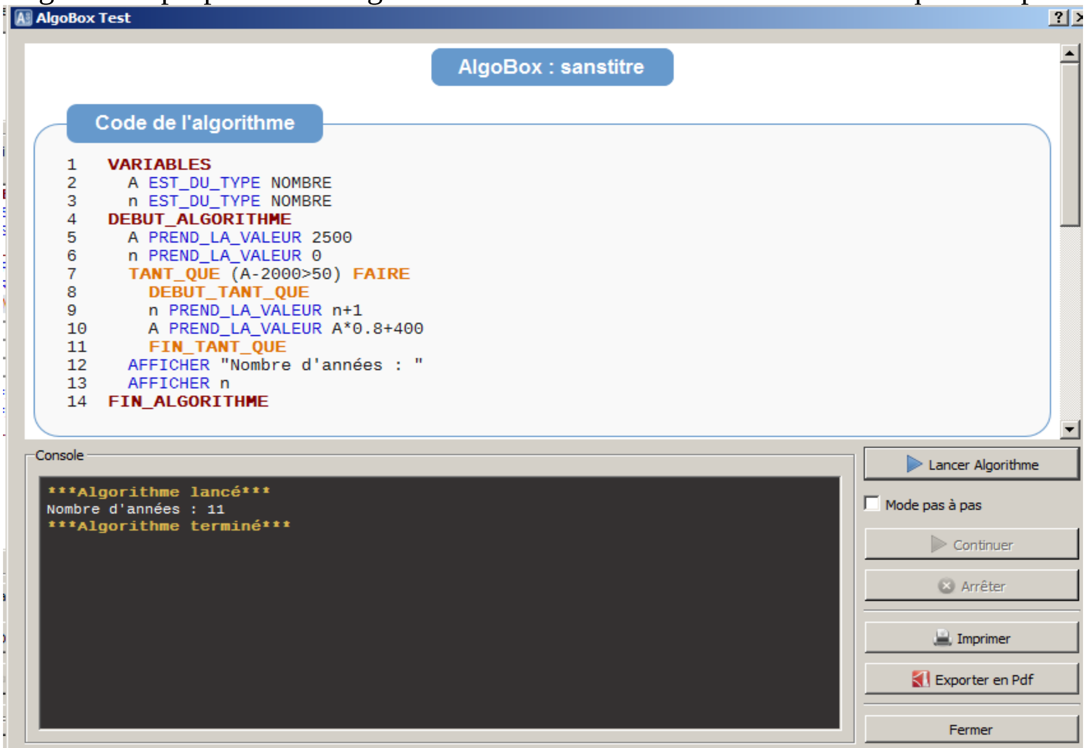
b) À l'aide de la calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme et interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.

B2 | f_x | =B1*0,8+400

	A	B	C	D
1	0	2500		
2	1	2400		
3	2	2320		
4	3	2256		
5	4	2204,8		
6	5	2163,84		
7	6	2131,072		
8	7	2104,8576		
9	8	2083,88608		
10	9	2067,10886		
11	10	2053,68709		
12	11	2042,94967		
13	12	2034,35974		

→au bout de 11 ans.

c) Écrire l'algorithme proposé avec Algobox et vérifier le résultat obtenu dans la question précédente.



Exercice 2

On comptait 700 élèves dans un lycée lors de la rentrée de 2012.

À la fin de chaque année scolaire, après le départ des nouveaux bacheliers et des élèves quittant l'établissement, le lycée conserve 70% de son effectif pour l'année suivante.

Il reçoit 240 nouveaux élèves à chaque rentrée.

1) Calculer le nombre d'élèves dans le lycée aux rentrées 2013 et 2014.

   En 2013 : $700\times 70\%+240=490+240=730$

   En 2014 : $730\times 70\%+240=511+240=751$

2) On définit la suite (a_n) par : $a_0=700$ et, pour tout entier naturel n , $a_{n+1}=0,7\times a_n+240$.

   Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=a_n-800$.

   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,7. Préciser son premier terme.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a_{n+1}-800}{a_n-800}=\frac{0,7\times a_n+240-800}{a_n-800}=\frac{0,7\times a_n-560}{a_n-800}=\frac{0,7\times(a_n-800)}{a_n-800}=0,7$$

   Autre méthode :

$$u_{n+1} = a_{n+1} - 800 = 0,7 \times a_n + 240 - 800 = 0,7 \times a_n - 560 = 0,7\left(a_n - 800\right) = 0,7u_n$$

Donc $\left(u_n\right)$ est une suite géométrique de premier terme $u_0 = a_0 - 800 = 700 - 800 = -100$ et de raison $q = 0,7$.

b) Exprimer u_n en fonction de n.

$$u_n = u_0 \times q^n = -100 \times 0,7^n$$

c) En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

$$u_n = a_n - 800 \quad \text{donc} \quad a_n = u_n + 800 = -100 \times 0,7^n + 800.$$

3) On choisit de modéliser le nombre d'élèves du lycée par les termes de la suite $\left(a_n\right)$.
Il faudra agrandir le lycée dès que l'effectif sera supérieur ou égal à 780 élèves.

a) Montrer que résoudre l'inéquation $800 - 100 \times 0,7^n \geq 780$ revient à résoudre l'inéquation : $0,7^n \leq 0,2$.

$$800 - 100 \times 0,7^n \geq 780$$
$$-100 \times 0,7^n \geq 780 - 800$$
$$0,7^n \leq \frac{-20}{-100}$$
$$0,7^n \leq \frac{1}{5}$$

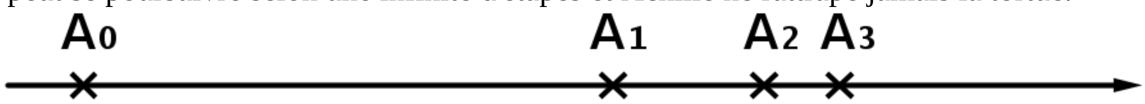
b) En quelle année faudra-t-il agrandir le lycée ?

$$\ln\left(0,7^n\right) \leq \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$
$$n \times \ln\left(0,7\right) \leq \ln\left(\frac{1}{5}\right) \qquad \rightarrow \ln\left(0,7\right) < 0$$
$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{\ln\left(0,7\right)}$$

$n \geq 4,5$ →soit au bout de la cinquième année en 2017.

Exercice 3

Le paradoxe d'Achille et de la tortue fut imaginé par Zénon d'Élée (5 siècles avant J.-C.).
Achille qui court très vite, dispute une course avec une tortue à laquelle il a laissé une certaine distance d'avance.
Au départ Achille se trouve à la position A_0 et la tortue à la position A_1.
Achille court et arrive en A_1. Pendant qu'il courait, la tortue a avancé et elle se trouve alors à la position A_2.
Achille court et arrive en A_2. Pendant qu'il courait, la tortue a avancé et elle se trouve alors à la position A_3.
Etc ...
La course peut se poursuivre selon une infinité d'étapes et Achille ne rattrape jamais la tortue.



Pourtant si Achille court plus vite que la tortue, on sait bien qu'il va la rattraper !
C'est ce type de proposition qui semble contraire à la logique, au "bon sens", que l'on appelle paradoxe.
Supposons qu'Achille parcourt 4 mètres en une seconde (soit environ 15 km/h), que la tortue avance de 0,5 m en une seconde et qu'elle ait, au départ, une avance de 560 mètres.

1) Quelle est la distance $d_0 = A_0A_1$ et quel est le temps t_0 qu'il faut à Achille pour parcourir cette distance ?

Au départ, Achille est en A_0, la tortue en A_1 avec une avance de 560 mètres.

Donc $d_0 = A_0A_1 = 560$ mètres.

$\text{Vitesse} = \dfrac{\text{Distance}}{\text{Temps}}$ donc $t_0 = \dfrac{d_0}{V_{Ach}} = \dfrac{560}{4} = 130$ secondes.

2) Pendant qu'Achille parcourait la distance d_0, de quelle longueur a avancé la tortue ?

Pendant ces 130 secondes, la tortue a avancé de : $d_1 = V_T \times t_0 = 0,5 \times 130 = 65\ m$

3) Quel est le temps t_1 qu'il faut à Achille pour parcourir la distance $d_1 = A_1A_2$?

$t_1 = \dfrac{d_1}{V_{Ach}} = \dfrac{65}{4} = 16,25$ secondes.

4) On note d_n la distance A_nA_{n+1} et t_n le temps qu'il faut à Achille pour parcourir la distance d_n.
Justifier que pour tout entier n, $d_n = 8 \times d_{n+1}$ et que $t_n = 8 \times t_{n+1}$.

$$d_n = V_{Ach} \times t_n \quad \text{et} \quad d_{n+1} = V_T \times t_n \quad \text{donc} \quad t_n = \frac{d_{n+1}}{V_T}$$

Ainsi : $d_n = V_{Ach} \times \dfrac{d_{n+1}}{V_T} = \dfrac{V_{Ach}}{V_T} \times d_{n+1} = \dfrac{4}{0,5} \times d_{n+1} = 8 \times d_{n+1}$

$$t_n = \frac{d_{n+1}}{V_T} = \frac{V_{Ach} \times t_{n+1}}{V_T} = \frac{4 \times t_{n+1}}{0,5} = 8 \times t_{n+1}$$

5) En déduire que les suites (d_n) et (t_n) sont géométriques et donner leur raison.

$$d_{n+1} = \frac{1}{8} d_n \quad \text{et} \quad t_{n+1} = \frac{1}{8} t_n$$

Ces deux suites sont géométriques de raison $\dfrac{1}{8}$.

6) Donner l'expression de d_n en fonction de n et de t_n en fonction de n.

$$d_n = d_0 \times q^n = 560 \times \left(\frac{1}{8}\right)^n \qquad t_n = t_0 \times q^n = 130 \times \left(\frac{1}{8}\right)^n$$

7) Calculer $D_n = d_0 + d_1 + d_2 + ... + d_n$ et $T_n = t_0 + t_1 + t_2 + ... + t_n$.

$$D_n = d_0 + d_1 + d_2 + ... + d_n = 560 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{8}} = 560 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{\frac{8}{8} - \frac{1}{8}} = 560 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{\frac{7}{8}}$$

$$D_n = 560 \times \frac{8}{7} \times \left[1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}\right] = 640 \times \left[1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}\right]$$

$$T_n = t_0 + t_1 + t_2 + ... + t_n = 130 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{8}} = 130 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{\frac{8}{8} - \frac{1}{8}} = 130 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{\frac{7}{8}}$$

$$T_n = 130 \times \frac{8}{7} \times \left[1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}\right] = \frac{1040}{7} \times \left[1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}\right]$$

8) Donner $\lim\limits_{n \to +\infty} D_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$.

$$\frac{1}{8} \in \left]-1;1\right[\quad \text{donc} \quad \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} D_n = 640 \text{ mètres} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} T_n = \frac{1040}{7} \simeq 148{,}57 \text{ secondes.}$$

9) Comment peut-on expliquer le paradoxe ?
Achille dans la présentation de Zénon d'Elée ne peut rattraper la tortue en raison du découpage à l'infini du temps nécessaire pour arriver à hauteur exacte de la tortue.
L'approche avec les suites (ci-dessus) montre que la limite temporelle existe, que l'on peut mathématiquement identifier un instant précis où Achille se trouve à hauteur exacte de la tortue.
Ce qui signifie que juste après, Achille dépasse la tortue et le paradoxe est levé.

Exercice 4

En 2005, année de sa création, un club de randonnée pédestre comportait 80 adhérents. Chacune des années suivantes on a constaté que :

- 10% des participants ne renouvelaient pas leur adhésion au club ;
- 20 nouvelles personnes s'inscrivaient au club.

On suppose que cette évolution reste la même au fil des ans.

Partie A

On donne l'algorithme ci-dessous :

Entrée :	Saisir un entier n positif
Initialisation :	X prend la valeur 80
Traitement :	Pour i allant de 1 à n
	Affecter à X la valeur 0,9*X+20
	Fin Pour
	X prend la valeur de X arrondie à l'entier inférieur
Sortie :	Afficher X

1) Pour la valeur $n = 2$ saisie, quelle est la valeur affichée à la sortie de cet algorithme ?

3) Interpréter dans le contexte du club de randonnée, pour la valeur $n = 2$ saisie, le nombre affiché à la sortie de cet algorithme.
→Dans deux ans, il devrait y avoir 102 adhérents.

Partie B

1) On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 80$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}9 \times a_n + 20$.
Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n = a_n - 200$.
   a) Démontrer que (b_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 200 = a_{n+1} = 0{,}9 \times a_n + 20 - 200 = 0{,}9 \times a_n - 180 = 0{,}9 \times (a_n - 200) = 0{,}9 \times b_n$$

Donc (b_n) est une suite géométrique de premier terme $b_0 = a_0 - 200 = 80 - 200 = -120$ et de raison $q = 0,9$.

b) Exprimer b_n en fonction de n.

$$b_n = b_n \times q^n = -120 \times 0,9^n$$

2) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n = 200 - 120 \times 0,9^n$.

$$b_n = a_n - 200 \quad \text{donc} \quad a_n = b_n + 200 = -120 \times 0,9^n + 200$$

3) Quelle est la limite de la suite (a_n) ?

$$0,9 \in]-1;1[\text{ donc } \lim_{n \to +\infty} 0,9^n = 0 \quad \text{ainsi} \quad \lim_{n \to +\infty} (a_n) = 200.$$

Partie C

1) L'objectif du président du club est d'atteindre au moins 180 adhérents. Cet objectif est-il réalisable ?
→le nombre d'adhérents doit augmenter vers un maximum de 200, donc 180 adhérents est un objectif réalisable.
2) Même question si l'objectif du président du club est d'atteindre au moins 300 adhérents.

$$a_{n+1} - a_n = \left(200 - 120 \times 0,9^{n+1}\right) - \left(200 - 120 \times 0,9^n\right) = 200 - 120 \times 0,9^{n+1} - 200 + 120 \times 0,9^n$$
$$= 120 \times 0,9^n \times 1 - 120 \times 0,9^n \times 0,9 = 120 \times 0,9^n \times (1 - 0,9) = 120 \times 0,9^n \times 0,1 = 12 \times 0,9^n$$

Donc la suite (a_n) est croissante avec un maximum égal à 200. Il n'est au regard de ces données pas réalisable d'atteindre 300 adhérents.

Exercice 5 :

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010 + n)$. En 2010, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

1) Montrer que la situation peut être modélisée par $u_0 = 50$ et pour tout entier naturel n par la relation :

$$u_{n+1} = 0,95 \times u_n + 3$$

En 2010, année 0, le nombre d'arbres est égal à 50 milliers → $u_0 = 50$

Soit u_n le nombre d'arbres l'année n →5% des arbres sont abattus donc il en reste 95% plus les nouveaux 3 milliers d'arbres ; on obtient bien :

$$u_{n+1} = 0,95 \times u_n + 3$$

En effet, 0,95 est le coefficient multiplicateur qui correspond à -5 %.

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = 60 - u_n$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

$$v_{n+1} = 60 - u_{n+1} = 60 - (0,95 \times u_n + 3) = 60 - 0,95 \times u_n - 3 = 57 - 0,95 \times u_n$$
$$= 0,95 \times 60 - 0,95 \times u_n = 0,95 \times (60 - u_n) = 0,95 \times v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 60 - u_0 = 60 - 50 = 10$ et de raison $q = 0,95$.

b) Calculer v_0. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

$$v_0 = 60 - u_0 = 60 - 50 = 10$$
$$v_n = v_0 \times q^n = 10 \times 0,95^n$$

c) Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n = 60 - 10 \times 0,95^n$.

$$v_n = 60 - u_n$$
$$v_n + u_n = 60$$

$u_n = 60 - v_n = 60 - 10\times 0,95^n$

3) Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2015. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.

En 2015 : $u_5 = 60 - 10\times 0,95^5 \simeq 52,262$, soit environ 52 262 arbres.

4) a) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $u_{n+1} - u_n = 0,5\times 0,95^n$.

$$u_{n+1} - u_n = \left(60 - 10\times 0,95^{n+1}\right) - \left(60 - 10\times 0,95^n\right) = 60 - 10\times 0,95^{n+1} - 60 + 10\times 0,95^n$$
$$= 10\times 0,95^n - 10\times 0,95^{n+1} = 10\times 0,95^n \times 1 - 10\times 0,95^n \times 0,95 = 10\times 0,95^n \times (1 - 0,95)$$
$$= 10\times 0,95^n \times 0,05 = 0,5\times 0,95^n$$

b) En déduire la monotonie de la suite.

$u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

5) Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres de la forêt en 2010.

$u_n > 50 + 50\times 5\%$

$u_n > 50 + 50\times 10\%$

$60 - 10\times 0,95^n > 55$

$-10\times 0,95^n > 55 - 60$

$0,95^n < \dfrac{-5}{-10}$

$0,95^n < \dfrac{1}{2}$ →on peut rechercher une solution avec la calculatrice

$\ln\left(0,95^n\right) < \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ →si le chapitre sur le logarithme a été traité

$n\times \ln(0,95) < \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ →or $\ln(0,95) < 0$

$n > \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\ln(0,95)}$

$n > 13,5$ →soit dans 14 ans en 2024.

6) Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter.

$0,95 \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,95^n = 0$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = 60$.

On peut espérer avoir 60 000 arbres dans cette forêt.