Term ES Notre Dame de La Merci - Montpellier

Contrôle sur la continuité

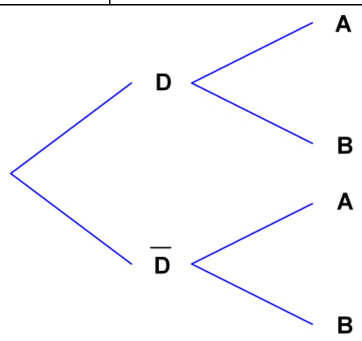
<u>Exercice 1 :</u>

Deux ateliers A et B fabriquent des puces électroniques.
Pour une commande de 2 000 pièces, A en a produit 60% et B en a produit 40%.
L'atelier A produit 4% de puces défectueuses et B en produit 3%.
On prend une puce au hasard dans la commande.
On appelle A l'événement « la puce provient de l'atelier A », B l'événement « elle provient de l'atelier B » et D l'événement « elle est défectueuse ».

1) Compléter le tableau suivant qui décrit la composition de la commande :

	nombre de puces défectueuses	nombre de puces non défectueuses	Total
nombre de puces produites par A			
nombre de puces produites par B			
Total			

2) Calculer les probabilités suivantes :
   a. $p(\mathrm{D})$, $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{D})$ et $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{A})$.
   b. $p(\overline{\mathrm{D}})$, $p(\overline{\mathrm{D}}\cap\mathrm{B})$ et $p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{B})$.
   c. Remplir l'arbre ci-contre :



<u>Exercice 2 :</u>

Partie A

Une usine produit des articles dont 3 % présentent des défauts. En vue d'un contrôle de qualité, on constitue au hasard un échantillon de 60 articles tirés de la production.
La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à la répétition de 60 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
On désigne par X la variable aléatoire qui associe à tout échantillon de 60 articles le nombre d'articles défectueux.

1) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
2) Déterminer une valeur arrondie à 10^{-3} près de chacun des évènements suivants :
   a. « L'échantillon contient au moins un article défectueux » ;
   b. « L'échantillon contient au plus trois articles défectueux ».
3) En moyenne, combien y a-t-il d'articles défectueux ?

Partie B

La direction de l'usine décide de mettre en place un contrôle de qualité. Le contrôle des articles produits s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

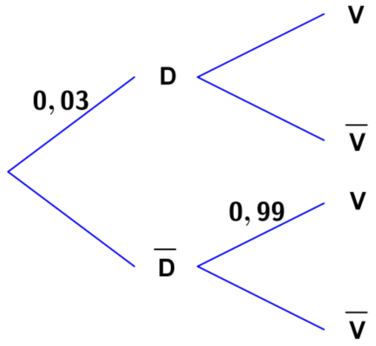
- sachant qu'un article est sans défaut, on l'accepte avec une probabilité de 0,99 ;
- sachant qu'un article présente des défauts, on le refuse avec une probabilité de 0,96.

Les articles acceptés à l'issue du contrôle de qualité sont mis en vente.
On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un article qui va être contrôlé.
On note les évènements suivants :

D : « L'article présente des défauts » ;
V : « L'article est mis en vente ».

$\overline{D}$ et $\overline{V}$ sont respectivement les évènements contraires des évènements D et V.

1) Recopier et compléter l'arbre probabiliste modélisant la situation :



2)
   a. Calculer la probabilité qu'un article présente des défauts et soit mis en vente.
   b. Montrer que la probabilité qu'un article soit mis en vente à l'issue du contrôle de qualité est égale à 0,9615.

3) La direction de l'usine souhaite que parmi les articles mis en vente il y ait moins de 0,1 % d'articles défectueux.
Ce contrôle de qualité permet-il d'atteindre cet objectif ?

Exercice 3 :

À la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que :

- 65% de la population concernée est contre la construction de ce barrage et parmi ces opposants, 70% sont des écologistes ;
- parmi les personnes non opposées à la construction, 20% sont des écologistes.

On interroge une personne au hasard.

1) Écrire les probabilités correspondantes aux données puis construire un arbre pondéré.
2) Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit opposée au barrage et soit écologiste.
3) Calculer la probabilité qu'une personne interrogée ne soit pas opposée et soit écologiste.
4) En déduire la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.

Contrôle sur les probabilités – CORRIGE

Exercice 1 :

Deux ateliers A et B fabriquent des puces électroniques.
Pour une commande de 2 000 pièces, A en a produit 60% et B en a produit 40%.
L'atelier A produit 4% de puces défectueuses et B en produit 3%.
On prend une puce au hasard dans la commande.
On appelle A l'événement « la puce provient de l'atelier A », B l'événement « elle provient de l'atelier B » et D l'événement « elle est défectueuse ».

3) *Compléter le tableau suivant qui décrit la composition de la commande :*

	nombre de puces défectueuses	nombre de puces non défectueuses	Total
nombre de puces produites par A	$1200\times 4\% = 48$	$1200-48=1152$	$2000\times 60\% = 1200$
nombre de puces produites par B	$800\times 3\% = 24$	$800-24=776$	$2000\times 40\% = 800$
Total	$48+24=72$	$1152+776=1928$	2000

4) Calculer les probabilités suivantes :

$$p(\mathrm{D})=\frac{\text{nombre de puces défectueuses}}{\text{nombre total de puces}}=\frac{72}{2000}=0,036$$

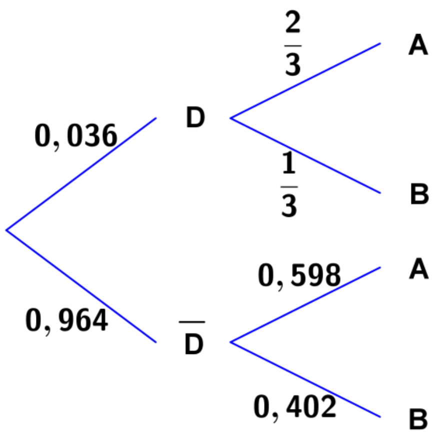
$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{D})=\frac{\text{nombre de puces défectueuses venant de l'atelier A}}{\text{nombre total de puces}}=\frac{48}{2000}=0,024$$

$$p_{\mathrm{D}}(\mathrm{A})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{D})}{p(\mathrm{D})}=\frac{0,024}{0,036}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$$

$$p(\overline{\mathrm{D}})=1-p(\mathrm{D})=1-0,036=0,964$$

$$p(\overline{\mathrm{D}}\cap\mathrm{B})=\frac{\text{nombre de puces non défectueuses venant de l'atelier B}}{\text{nombre total de puces}}=\frac{776}{2000}=0,388$$

$$p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{B})=\frac{p(\overline{\mathrm{D}}\cap\mathrm{B})}{p(\overline{\mathrm{D}})}=\frac{0,388}{0,964}\simeq 0,402$$



Exercice 2 :

Partie A

Une usine produit des articles dont 3 % présentent des défauts. En vue d'un contrôle de qualité, on constitue au hasard un échantillon de 60 articles tirés de la production.
La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à la répétition de 60 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

On désigne par X la variable aléatoire qui associe à tout échantillon de 60 articles le nombre d'articles défectueux.

4) *Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?*
   Succession d'évènements identiques et indépendants menant à deux situations : Défaut/Pas de défaut
   La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0,03$.

5) *Déterminer une valeur arrondie à 10^{-3} près de chacun des évènements suivants :*
   a. *« L'échantillon contient au moins un article défectueux » ;*
   $$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{60}{0} \times 0,03^0 \times 0,97^{60} = 1 - BinomFDP(60, 0.03, 0) \simeq 0,839$$
   b. *« L'échantillon contient au plus trois articles défectueux ».*
   $$p(X \leq 3) = \text{BinomFRep}(60, 0.03, 3) \simeq 0,894$$

6) *En moyenne, combien y a-t-il d'articles défectueux ?*
   Espérance : $E(X) = n \times p = 60 \times 0,03 = 1,8$ soit 1,8 machines défectueuses

Partie B

La direction de l'usine décide de mettre en place un contrôle de qualité. Le contrôle des articles produits s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

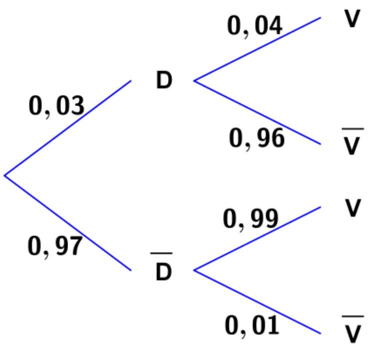
- *sachant qu'un article est sans défaut, on l'accepte avec une probabilité de 0,99 ;*
- *sachant qu'un article présente des défauts, on le refuse avec une probabilité de 0,96.*

Les articles acceptés à l'issue du contrôle de qualité sont mis en vente.
On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un article qui va être contrôlé.
On note les évènements suivants :

D : « L'article présente des défauts » ;
V : « L'article est mis en vente ».

$\overline{\text{D}}$ *et* $\overline{\text{V}}$ *sont respectivement les évènements contraires des évènements D et V.*

4) *Recopier et compléter l'arbre probabiliste modélisant la situation :*
   D'après l'énoncé :
   $$p_{\overline{\text{D}}}(\text{V}) = 0,99 \quad \text{et} \quad p_{\text{D}}(\overline{\text{V}}) = 0,96$$



5)
   a. *Calculer la probabilité qu'un article présente des défauts et soit mis en vente.*
   $$p_{\text{D}}(\text{V}) = \frac{p(\text{D} \cap \text{V})}{p(\text{D})} \quad \text{donc} \quad p(\text{D} \cap \text{V}) = p_{\text{D}}(\text{V}) \times p(\text{D}) = 0,04 \times 0,03 = 0,0012$$
   b. *Montrer que la probabilité qu'un article soit mis en vente à l'issue du contrôle de qualité est égale à 0,9615.*
   Loi des probabilités totales :
   $$p(\text{D}) = p(\text{D} \cap \text{V}) + p(\overline{\text{D}} \cap \text{V}) = 0,0012 + p_{\overline{\text{D}}}(\text{V}) \times p(\overline{\text{D}}) = 0,0012 + 0,99 \times 0,97 = 0,9615$$

6) *La direction de l'usine souhaite que parmi les articles mis en vente il y ait moins de 0,1 % d'articles défectueux. Ce contrôle de qualité permet-il d'atteindre cet objectif ?*
   La direction veut que : $p_{\text{V}}(\text{D}) < 0,001$.

$p_{V}(D) = \dfrac{p(D \cap V)}{p(V)} = \dfrac{0,0012}{0,9615} \simeq 0,0012$: cet objectif n'est pas atteint.

Exercice 3 :

À la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que :

- *65% de la population concernée est contre la construction de ce barrage et parmi ces opposants, 70% sont des écologistes ;*
- *parmi les personnes non opposées à la construction, 20% sont des écologistes.*

On interroge une personne au hasard.

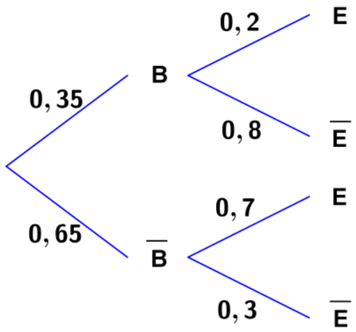
5) *Écrire les probabilités correspondantes aux données puis construire un arbre pondéré.*

   On note les évènements suivants :

   B : « La personne est pour le barrage » ;

   E : «La personne est écologiste ».

   $p(\overline{B}) = 0,65$, $p_{\overline{B}}(E) = 0,7$ et $p_{B}(E) = 0,2$



6) *Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit opposée au barrage et soit écologiste.*

   $p(\overline{B} \cap E) = p_{\overline{B}}(E) \times p(\overline{B}) = 0,7 \times 0,65 = 0,455$

7) *Calculer la probabilité qu'une personne interrogée ne soit pas opposée au barrage et soit écologiste*

   $p(B \cap E) = p_{B}(E) \times p(B) = 0,2 \times 0,35 = 0,07$

8) *En déduire la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.*

   Loi des probabilités totales :

   $p(E) = p(B \cap E) + p(\overline{B} \cap E) = 0,455 + 0,07 = 0,525$